

Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра.

Векторная алгебра

Лекция 1.5

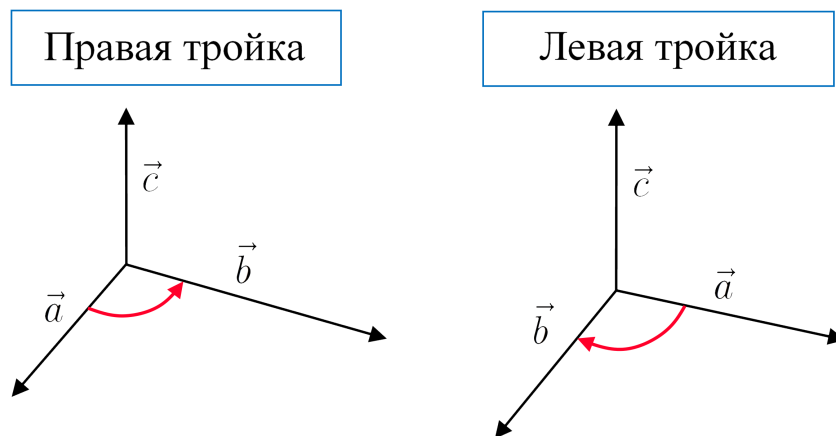
Аннотация

Векторное и смешанное произведения векторов, их свойства и практические приложения.

1 Векторное произведение векторов

Определение

Три некопланарных вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора \vec{c} кратчайший поворот от первого вектора \vec{a} ко второму вектору \vec{b} виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой.



Так как три некопланарных вектора образуют базис в пространстве, то также говорят о **правых** и **левых базисах**. Соответственно, все базисы в пространстве разделяются на два класса: класс пра-

вых базисов и класс левых базисов. Класс, к которому относится фиксированный базис, называется его **ориентацией**.

Определение

Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор \vec{c} , который удовлетворяет условиям:

- 1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;
 - 2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$;
 - 3) векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} образуют правую тройку.
- Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Алгебраические свойства векторного произведения:

- 1) антикоммутативный закон

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

- 2) дистрибутивный закон

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

- 3) ассоциативный закон относительно числовых множителей

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}), \lambda \in R.$$

Геометрическое свойство векторного произведения:

Векторное произведение равняется нулевому вектору тогда и только тогда, когда его множители коллинеарны.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

Теорема (векторное произведение в координатной форме)

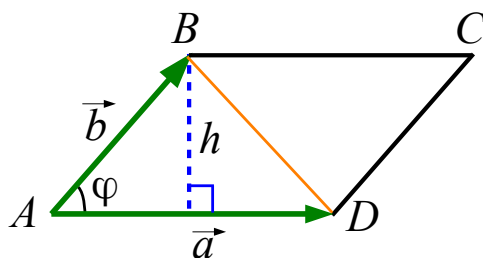
Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

2 Приложения векторного произведения

1. Площадь параллелограмма и треугольника (**геометрический смысл** векторного произведения).

Построим на векторах \vec{a} и \vec{b} параллелограмм $ABCD$:



Площадь параллелограмма $ABCD$ равна:

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin \varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Площадь $\triangle ABD$ равна половине площади параллелограмма $ABCD$:

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Тогда имеем

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ и } S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

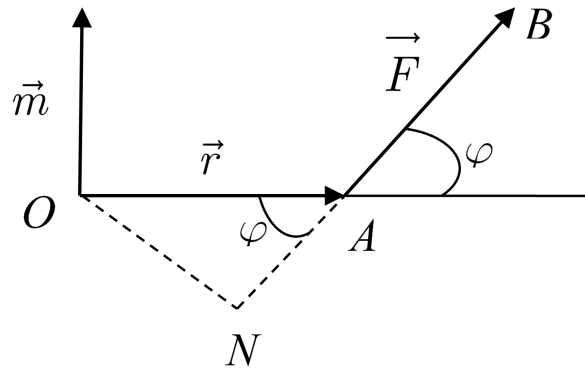
2. Момент силы относительно точки (**механический смысл** векторного произведения).

Пусть к точке A приложена сила $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$ и пусть точка O – некоторая точка пространства. Из физики известно, что **моментом силы** \vec{F} относительно точки O называется вектор \vec{m} , который проходит через точку O и

- а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B ;
- б) численно равен произведению силы на плечо

$$|\vec{m}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot ON = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{AB} \overrightarrow{OA}});$$

- в) образует правую тройку с векторами \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{AB} .



Следовательно, $\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB} = \vec{r} \times \vec{F}$.

3 Смешанное произведение векторов

Определение

Если вектор \vec{a} векторно умножить на вектор \vec{b} , а полученный вектор скалярно умножить на вектор \vec{c} , то получится число, называемое **смешанным произведением** векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Обозначение: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Алгебраическое свойство смешанного произведения:

В смешанном произведении знаки векторного и скалярного умножений можно менять местами

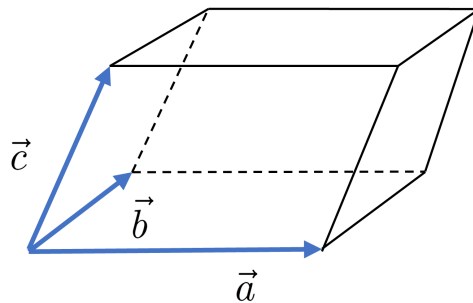
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Геометрические свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение равняется нулю тогда и только тогда, когда его множители компланарны.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны.}$$

2. На трех некопланарных векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , выходящих из одной вершины, построим параллелепипед.



Тогда объем построенного параллелепипеда будет численно равен значению смешанного произведения векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , взятому со знаком «плюс», если тройка векторов правая, и со знаком «минус», если тройка – левая.

Теорема (смешанное произведение в координатной форме)

Пусть заданы три вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

4 Приложения смешанного произведения

1. Взаимная ориентация векторов в пространстве.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая.

2. Объемы параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , равен

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,$$

а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, есть

$$V_1 = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$