Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра.
Векторная алгебра
Лекция 1.1

Аннотация

Матрицы. Виды матриц. Линейные операции над матрицами (сложение и умножение на число) и их свойства. Нелинейные операции над матрицами (произведение и транспонирование) и их свойства. Элементарные преобразования матриц.

1 Матрицы

Определение

Числовой матрицей размера $m \times n$ (произносится «эм на эн») называется совокупность чисел, расположенных в виде таблицы, в которой имеется m строк и n столбцов. Составляющие матрицу числа называются ее **элементами**.

Матрицы обозначаются заглавными латинскими буквами A, B, C, ... и записываются в виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Здесь a_{ij} - элемент матрицы, находящийся в строке под номером i и в столбце под номером j. Иногда в обозначении матрицы указывается ее размерность: $A_{m \times n}$, где m - число строк, а n - число столбцов. Часто используется сокращенная запись матрицы: $A = (a_{ij})$.

Пример. $A_{2\times 4} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ - матрица A имеет размер 2×4, т.к. она содержит 2 строчки и 4 столбца, ее элемент $a_{23} = 7$ расположен во второй строке и третьем столбце.

2 Виды матриц

Определение

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется **квадратной**, в противном случае - **прямоугольной**.

Определение

Квадратная матрица размера $n\times n$ называется **матрицей n-ого порядка**.

Определение

В квадратной матрице элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1}$ - **побочную**.

Например,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \mathbf{a_{33}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & \mathbf{a_{22}} & a_{23} \\ \mathbf{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь элементы главной диагонали выделены синим цветом, а элементы побочной - красным.

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Определение

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице.

Обозначение: E.

Определение

Квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю, называется **треугольной**.

Например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**.

Обозначение: O.

Определение

Матрица, состоящая только из одного столбца или одной строки, называется **вектором** (**вектор-столбцом** или **вектор-строкой**).

3 Линейные операции над матрицами

Определение

Две матрицы A и B называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A = B$.

Определение

Суммой (или разностью) двух матриц одинакового размера A и B называется матрица C, элементы которой равны сумме (или разности) соответствующих элементов матриц A и B.

Обозначение: $C = A + B$, $C = A - B$.

Пример.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{+}3 & 2{-}1 \\ 3{+}0 & 4{+}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Определение

Произведением матрицы A **на число** α называется матрица B, каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента матрицы A на число α.

Обозначение: $B = \alpha \cdot A$.

Пример.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда

$B = 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{\cdot}1 & 2{\cdot}2 \\ 2{\cdot}3 & 2{\cdot}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Определение

Матрица $(-1) \cdot A$ называется **противоположной** матрице A.

Обозначение: $-A$.

Свойства линейных операций:

1) коммутативный закон сложения матриц

$$A + B = B + A;$$

2) ассоциативный закон сложения матриц

$$A + (B + C) = (A + B) + C;$$

3) дистрибутивный закон умножения относительно сложения матриц

$$\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B;$$

4) дистрибутивный закон умножения относительно сложения чисел

$$(\alpha+\beta)\,A=\alpha A+\beta A;$$

5) ассоциативность относительно умножения чисел

$$\alpha\,(\beta A)=(\alpha\beta)\,A.$$

4 Нелинейные операции над матрицами

Определение

Матрица A называется **согласованной** с матрицей B, если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B.

Определение

Произведением двух согласованных матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{n\times k}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times k}=(c_{ij})=A\cdot B$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B, т.е.

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}$$

Пример. Найти $A\cdot B$ и $B\cdot A$ (если они существуют):

$A=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}$.

Матрицы $A_{2\times 2}$ и $B_{2\times 3}$ являются согласованными. В результате умножения A на B получится матрица размера 2×3:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3&1\\4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot1+1\cdot3&3\cdot2+1\cdot1&3\cdot1+1\cdot0\\4\cdot1+2\cdot3&4\cdot2+2\cdot1&4\cdot1+2\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&7&3\\10&10&4\end{pmatrix}.$$

Матрицы $B_{2\times 3}$ и $A_{2\times 2}$ не являются согласованными, поэтому произведение $B\cdot A$ не существует.

Свойства операции умножения:

1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2) $A \cdot (B + C) = AB + AC$, $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
3) $(\alpha A) \cdot B = \alpha\,(A \cdot B)$;
4) в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$;
5) $A \cdot E = E \cdot A = A$.

Определение

***n*-ой степенью матрицы** A называется матрица A^n, равная $A \cdot A \cdot ... \cdot A$ (n раз). При этом полагают, что $A^0 = E$.

Определение

Матрица, полученная из матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с соответствующим номером, называется **транспонированной** к A.

Обозначение: A^T.

Пример. Если $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Определение

Операция нахождения транспонированной матрицы называется **транспонированием матрицы.**

Свойства операции транспонирования:

1) $\left(A^T\right)^T = A$;
2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
4) $(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T$.

Определение

Квадратная матрица A называется **симметрической (или симметричной)**, если она не изменяется в результате транспонирования, т.е. $A^T = A$.

5 Элементарные преобразования матриц

Определение

Следующие преобразования матриц будем называть **элементарными**:

1) перестановка местами двух параллельных рядов (строк или столбцов) матрицы;

2) умножение всех элементов ряда на число, отличное от нуля;

3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда.

Определение

Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение: $A \sim B$.