Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра.
Векторная алгебра
Текст 1.2

Аннотация

Линейная зависимость строк и столбцов матрицы. Базисный минор, теорема о базисном миноре. Ранг матрицы, теорема о ранге матрицы, свойства ранга матрицы. Способы вычисления ранга матрицы: метод окаймляющих миноров, метод элементарных преобразований.

1 Линейная зависимость строк и столбцов матрицы

Любую строку произвольной матрицы A можно рассматривать как матрицу из одной строки, а любой столбец - как матрицу из одного столбца. Следовательно, для строк и столбцов матрицы применимы правила сложения матриц и умножения матрицы на число. Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

состоит из двух строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$P_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix},$$

рассматриваемых как отдельные однострочные матрицы. Следовательно, к ним применимы определенные ранее правила сложения матриц и умножения матрицы на число:

$$P_1 + P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{+}3 & 2{+}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix},$$
$$2 \cdot P_1 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{\cdot}1 & 2{\cdot}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Определение

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - действительные числа, $P_1, P_2, ..., P_n$, - строки (столбцы) матрицы A. Выражение $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + ... + \alpha_n P_n$ называется **линейной комбинацией строк (столбцов)** $P_1, P_2, ..., P_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Определение

Линейная комбинация строк (столбцов) матрицы называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю, и **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Определение

Строки (столбцы) $P_1, P_2, ..., P_n$ матрицы A называются **линейно зависимыми**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих строк (столбцов), равная нулевой строке (столбцу).

Определение

Строки (столбцы) $P_1, P_2, ..., P_n$ матрицы A называются **линейно независимыми**, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке (столбцу).

Примеры:

1. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

состоит из двух линейно зависимых строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix},$$

т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$2 \cdot P_1 - P_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 - 2 & 2\cdot 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

состоит из трех строк

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Строки P_2 и P_3 линейно зависимы, т.к.

$$2 \cdot P_2 - P_3 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 2\cdot 0 - 0 & 2\cdot 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а строки P_1 и P_2 линейно независимы, т.к. только их тривиальная линейная комбинация равна нулевой строке:

$$0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 0\cdot 0 & 0\cdot 0 + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В то же время все три строки P_1, P_2 и P_3 будут линейно зависимы, т.к. для них можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$0 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 - P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теоремы (о линейной зависимости строк матрицы)

1. Если среди строк матрицы есть нулевая, то эти строки линейно зависимы.

2. Если строки матрицы линейно зависимы, то одна из них есть линейная комбинация остальных.

Аналогичные рассуждения можно провести и для столбцов матрицы A.

2 Ранг матрицы

Определение

Минором порядка k матрицы A называют определитель, который составлен из элементов этой матрицы, стоящих на пересечении произвольно выбранных k строк и k столбцов с сохранением их порядков.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$A_{3\times4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Миноры 1-го порядка: элементы матрицы 1, 2, 3, 4, 0, -1, ...

Миноры 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \ldots$$

Миноры 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Определение

Минор M матрицы A называют **базисным**, если он отличен от нуля, а все миноры большего порядка равны нулю или не существуют.

Замечание

Матрица может иметь несколько базисных миноров одного порядка.

Определение

Строки и столбцы матрицы, в которых расположен выбранный базисный минор, называют **базисными**.

Теорема (о базисном миноре)

Базисные строки (столбцы) матрицы A, соответствующие ее базисному минору M, линейно независимы. Любые строки (столбцы) матрицы А, не входящие в М, являются линейными комбинациями базисных строк (столбцов).

Следствие

Для того, чтобы квадратная матрица была невырожденной необходимо и достаточно, чтобы ее строки (столбцы) были линейно независимы.

Определение

Рангом матрицы A называется порядок ее базисного минора.
Обозначение: r, $r(A)$, $rangA$.

Пример. Ранг матрицы
$$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
равен двум, т.к. имеются отличные от нуля миноры второго порядка, например, $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$, а все миноры третьего порядка равны нулю.

Свойства ранга матрицы:
1. $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.
2. $r(A \cdot B) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.
3. $r(A^T) = r(A)$.

Теорема (о ранге матрицы)

Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов), через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).

Следствие

Для любой матрицы максимальное число линейно независимых строк равно максимальному числу линейно независимых столбцов.

3 Способы вычисления ранга матрицы

Ранг матрицы вычисляется с помощью двух методов:
1) метод окаймляющих миноров;
2) метод элементарных преобразований.

3.1 Метод окаймляющих миноров

Определение

Минор M' матрицы A называется **окаймляющим для минора** M, если он получается из последнего добавлением одной новой строки и одного нового столбца матрицы А.

Теорема (об окаймляющих минорах)

Если для некоторого минора матрицы все окаймляющие его миноры равны нулю, то он является базисным.

Метод окаймляющих миноров позволяет найти один из базисных миноров и состоит в следующем:

1. Выбирается ненулевой минор первого порядка (ненулевой элемент матрицы).

2. К этому минору последовательно добавляются такие строки и столбцы, чтобы новый окаймляющий минор был отличен от нуля. Если этого сделать нельзя, то последний ненулевой минор является базисным, а его порядок равен рангу матрицы.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Так как матрица A не является нулевой, то $rangA \geq 1$. В матрице A имеется минор второго порядка, отличный от нуля, например, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Следовательно, $rangA \geq 2$. Подсчитаем все возможные миноры третьего порядка, окаймляющие M_2. Их два:

$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 0$, $M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Таким образом, все окаймляющие миноры минора M_2 равны нулю. Значит, $rangA = 2$.

3.2 Метод элементарных преобразований

Теорема (о ранге матрицы при элементарных преобразованиях)

Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях.

Определение

Ступенчатой называется матрица, у которой все ненулевые строки располагаются над всеми нулевыми строками и первый ненулевой элемент каждой ненулевой строки располагается правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Замечание

Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.

Теорема (о ранге ступенчатой матрицы)

Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк.

Метод элементарных преобразований состоит в следующем:

1. С помощью элементарных преобразований приводим данную матрицу к ступенчатому виду.

2. Определяем ранг исходной матрицы как количество ненулевых строк в получившейся ступенчатой матрице.

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду и найдем число ненулевых строк полученной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\sim}$$

$$\overset{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \overset{(6)}{\sim}$$

$$\overset{(6)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проведены следующие элементарные преобразования:

(1) переставили местами первую и вторую строки;

(2) прибавили к четвертой строке третью;

(3) прибавили к третьей строке первую, умноженную на -2, и четвертую строку поделили на 3;

(4) поделили третью строку на 5 и переставили местами третью и четвертую строки;

(5) к третьей строке, умноженной на -3, прибавили вторую строку;

(6) к четвертой строке прибавили третью.

Видно, что матрица, полученная из матрицы A указанными элементарными преобразованиями, имеет ступенчатую форму с тремя ненулевыми строками. Следовательно, $rang(A) = 3$.

Замечания

1. При нахождении ранга матрицы методом окаймляющих миноров может потребоваться не только большое количество вычислений, но и в некоторых случаях вычисление определителей высоких порядков. Однако, в результате будет найден не только ранг матрицы, но и один из ее базисных миноров.

2. Количество вычислений при нахождении ранга матрицы методом элементарных преобразований гораздо меньше. Но этот метод позволяет найти базисный минор только для матрицы ступенчатого вида, полученной в результате элементарных преобразований. Для нахождения базисного минора исходной матрицы необходимы трудоемкие дополнительные вычисления с учетом уже известного ранга матрицы.