Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Аналитическая геометрия

Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра

Лекция 1.5

к.ф.-м.н. Меньшова И.В.

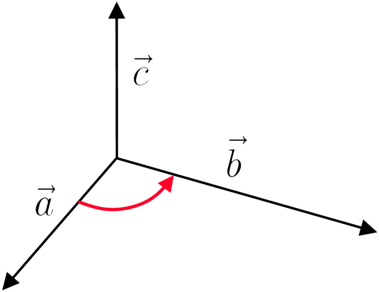
Векторное произведение векторов

Определение

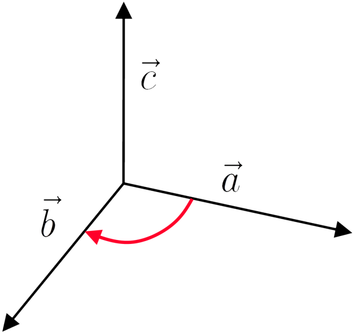
Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую**, если по часовой.

Векторное произведение векторов

Правая тройка



Левая тройка



Так как три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве, то также говорят о **правых** и **левых базисах.**

Векторное произведение векторов

Так как три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве, то также говорят о **правых** и **левых базисах.** Соответственно, все базисы в пространстве разделяются на два класса: класс правых базисов и класс левых базисов.

Так как три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве, то также говорят о **правых** и **левых базисах.** Соответственно, все базисы в пространстве разделяются на два класса: класс правых базисов и класс левых базисов. Класс, к которому относится фиксированный базис, называется его **ориентацией**.

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

Векторное произведение векторов

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$;

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Определение

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Векторное произведение векторов

Алгебраические свойства векторного произведения:

Векторное произведение векторов

Алгебраические свойства векторного произведения:

1) антикоммутативный закон

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

Алгебраические свойства векторного произведения:

1) антикоммутативный закон

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

2) дистрибутивный закон

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

Алгебраические свойства векторного произведения:

1) антикоммутативный закон

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$$

2) дистрибутивный закон

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c},$$

3) ассоциативный закон относительно числовых множителей

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda\vec{b}\right), \ \lambda \in R.$$

Геометрическое свойство векторного произведения:

Векторное произведение векторов

Геометрическое свойство векторного произведения:
Векторное произведение равняется нулевому вектору тогда и только тогда, когда его множители коллинеарны.

Геометрическое свойство векторного произведения:

Векторное произведение равняется нулевому вектору тогда и только тогда, когда его множители коллинеарны.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} || \vec{b}.$$

Теорема (векторное произведение в координатной форме)

Теорема (векторное произведение в координатной форме)

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Теорема (векторное произведение в координатной форме)
Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Теорема (векторное произведение в координатной форме)
Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Приложения векторного произведения

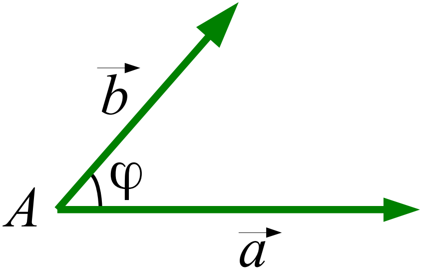
1. Площадь параллелограмма и треугольника

1. Площадь параллелограмма и треугольника (**геометрический смысл** векторного произведения).

1. Площадь параллелограмма и треугольника (**геометрический смысл** векторного произведения).
Построим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм $ABCD$:

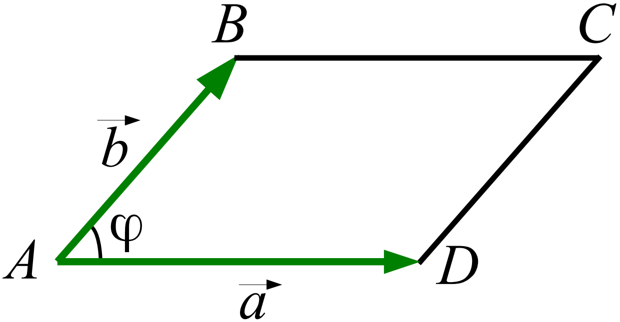
1. Площадь параллелограмма и треугольника (**геометрический смысл** векторного произведения).

Построим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм $ABCD$:



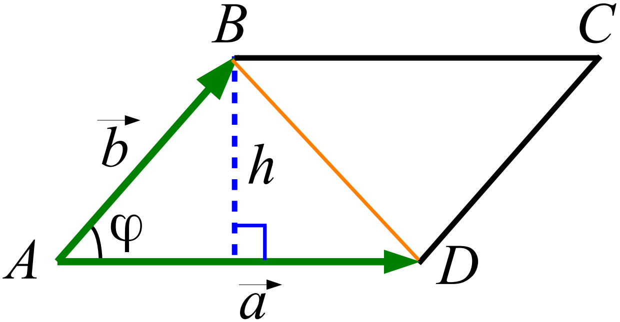
1. Площадь параллелограмма и треугольника (**геометрический смысл** векторного произведения).

Построим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм $ABCD$:



1. Площадь параллелограмма и треугольника (**геометрический смысл** векторного произведения).

Построим на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллелограмм $ABCD$:



Площадь параллелограмма $ABCD$ равна:

Приложения векторного произведения

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна:

$$S_{ABCD} = AD \cdot h$$

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна:

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin\varphi$$

Приложения векторного произведения

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна:

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin\varphi =$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}})$$

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна:

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin\varphi =$$
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Приложения векторного произведения

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна:

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin\varphi =$$
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Площадь ΔABD равна половине площади параллелограмма $ABCD$:

Приложения векторного произведения

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна:

$$S_{ABCD} = AD \cdot h = AD \cdot AB \cdot \sin\varphi =$$
$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Площадь ΔABD равна половине площади параллелограмма $ABCD$:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Тогда имеем

$$S_{\text{пар}} = |\vec{a} \times \vec{b}| \text{ и } S_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|.$$

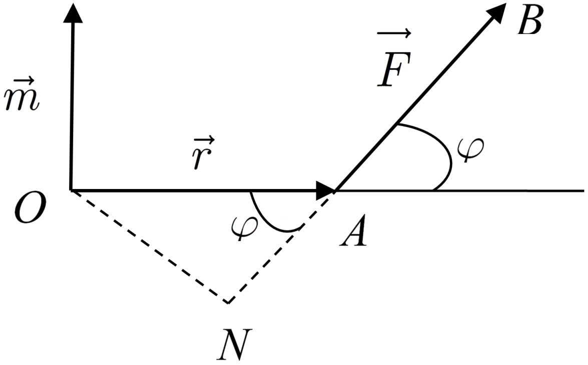
2. Момент силы относительно точки

Приложения векторного произведения

2. Момент силы относительно точки (**механический смысл** векторного произведения).

2. Момент силы относительно точки (**механический смысл** векторного произведения).
Пусть к точке A приложена сила $\vec{F} = \overrightarrow{AB}$ и пусть точка O – некоторая точка пространства.

Приложения векторного произведения



Приложения векторного произведения

Из физики известно, что **моментом силы** $\vec{F}$ относительно точки O называется вектор $\vec{m}$, который проходит через точку O и а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;
б) численно равен произведению силы на плечо

Приложения векторного произведения

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

б) численно равен произведению силы на плечо

$$|\vec{m}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot ON = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{OA}});$$

Приложения векторного произведения

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

б) численно равен произведению силы на плечо

$$|\vec{m}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot ON = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{OA}});$$

в) образует правую тройку с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Приложения векторного произведения

а) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B;

б) численно равен произведению силы на плечо

$$|\vec{m}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot ON = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OA}| \cdot \sin(\widehat{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{OA}});$$

в) образует правую тройку с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

Следовательно, $\vec{m} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Смешанное произведение векторов

Смешанное произведение векторов

Определение

Если вектор $\vec{a}$ векторно умножить на вектор $\vec{b}$, а полученный вектор скалярно умножить на вектор $\vec{c}$, то получится число, называемое **смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Смешанное произведение векторов

Определение
Если вектор $\vec{a}$ векторно умножить на вектор $\vec{b}$, а полученный вектор скалярно умножить на вектор $\vec{c}$, то получится число, называемое **смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначение: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Алгебраическое свойство смешанного произведения:

Алгебраическое свойство смешанного произведения:
В смешанном произведении знаки векторного и скалярного умножений можно менять местами

Алгебраическое свойство смешанного произведения:
В смешанном произведении знаки векторного и скалярного умножений можно менять местами

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Геометрические свойства смешанного произведения:

Геометрические свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение равняется нулю тогда и только тогда, когда его множители компланарны.

Смешанное произведение векторов

Геометрические свойства смешанного произведения:

1. Смешанное произведение равняется нулю тогда и только тогда, когда его множители компланарны.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\ \vec{b} \text{ и } \vec{c} \text{ компланарны.}$$

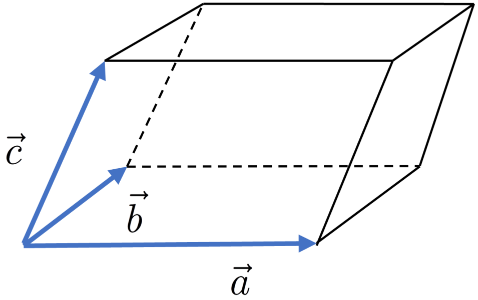
Геометрические свойства смешанного произведения:

2. На трех некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, выходящих из одной вершины, построим параллелепипед.

Смешанное произведение векторов

Геометрические свойства смешанного произведения:

2. На трех некомпланарных векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, выходящих из одной вершины, построим параллелепипед.



Смешанное произведение векторов

Геометрические свойства смешанного произведения:

Тогда объем построенного параллелепипеда будет численно равен значению смешанного произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком «плюс», если тройка векторов правая, и со знаком «минус», если тройка – левая.

Теорема (смешанное произведение в координатной форме)

Теорема (смешанное произведение в координатной форме)

Пусть заданы три вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Приложения смешанного произведения

1. Взаимная ориентация векторов в пространстве.

Приложения смешанного произведения

1. Взаимная ориентация векторов в пространстве.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая.

Приложения смешанного произведения

1. Взаимная ориентация векторов в пространстве.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ правая.

Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ левая.

Приложения смешанного произведения

2. Объемы параллелепипеда и треугольной пирамиды.

2. Объемы параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,$$

Приложения смешанного произведения

2. Объемы параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,$$

а объем треугольной пирамиды, построенной на этих же векторах, есть

$$V_1 = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$