Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Текст 1.4

Аннотация

Действия над векторами, заданными своими координатами. Линейная зависимость векторов, критерий линейной зависимости и свойства систем линейно зависимых и независимых векторов. Базис, виды базисов. Координаты вектора в заданном базисе. Скалярное произведение и его приложения.

1 Действия над векторами в координатной форме

Пусть даны векторы $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда

1. При сложении векторов их одноименные координаты складываются

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

2. При умножении вектора на число координаты вектора умножаются на это число

$$\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z).$$

3. Два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их координаты

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z.$$

4. Координаты коллинеарных векторов пропорциональны

$$\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

5. Координаты вектора равны разности соответствующих координат его конца и начала. Если даны $A\,(x_1, y_1, z_1)$, $B\,(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

2 Линейная зависимость векторов

Определение

Выражение $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$ называется **линейной комбинацией векторов** $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - любые действительные числа, называемые **коэффициентами** линейной комбинации.

Определение

Будем говорить, что **вектор** $\vec{b}$ **разлагается (линейно выражается) по векторам** $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$, если он равен некоторой их линейной комбинации. Числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называются **коэффициентами разложения** вектора $\vec{b}$ по системе векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ ...,\ \vec{a}_n$.

Определение

Линейная комбинация векторов называется **тривиальной**, если все ее коэффициенты равны нулю, и **нетривиальной**, если хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля.

Определение

Система векторов $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору.

Определение

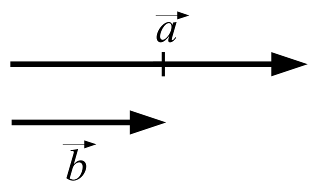
Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется **линейно независимой**, если только их тривиальная линейная комбинация равна нулевому вектору.

Теорема (критерий линейной зависимости векторов)

Система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда какой-либо из векторов этой системы можно представить в виде линейной комбинации остальных.

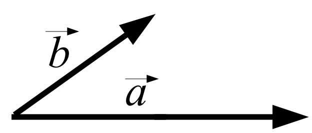
Примеры:

1.



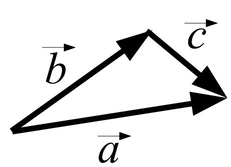
Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, т.к. вектор $\vec{a}$ можно выразить через вектор $\vec{b}$ в виде $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$. В этом случае для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно составить нетривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

2.



Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно независимы, т.к. вектор $\vec{a}$ нельзя выразить через вектор $\vec{b}$. Для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно составить лишь тривиальную линейную комбинацию, равную нулевому вектору: $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

3.



Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, т.к. вектор $\vec{a}$ можно выразить через векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в виде $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$. Тогда $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$.

Свойства систем линейно зависимых и независимых векторов:

1. Система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

2. Если система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$ линейно независима, то любая часть этой системы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_s$ $(s < n)$ линейно независима.

3. Если система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_n$ линейно зависима, то любая дополненная система $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, $\vec{a}_{n+1}$, ..., $\vec{a}_{n+m}$ линейно зависима.

4. Система двух векторов является линейно зависимой тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.

5. Система векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

6. Любые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы.

3 Базис

Определение

Базисом называется любая совокупность линейно независимых векторов, через которые можно выразить все остальные векторы.

Базисом на плоскости является совокупность любых двух линейно независимых векторов, лежащих в этой плоскости.

Базисом в пространстве является совокупность любых трех линейно независимых векторов.

Из рассмотренных ранее свойств систем линейно зависимых и независимых векторов следует, что любые два неколлинеарных вектора образуют базис на плоскости, а любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве.

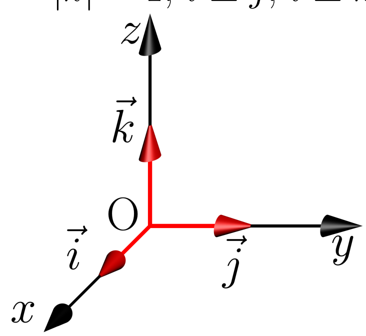
Пусть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют базис в пространстве. Тогда любой вектор $\vec{x}$ пространства можно представить как линейную комбинацию этих векторов $\vec{x} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$. Такое представление вектора $\vec{x}$ называется **разложением вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$**, а числа α_1, α_2, α_3 называются **координатами вектора $\vec{x}$ в этом базисе**.

Определение

Базис называется **ортогональным**, если он состоит из векторов, лежащих на взаимно перпендикулярных прямых. Базис называют **ортонормированным**, если он ортогональный и состоит из единичных векторов.

Любая декартова прямоугольная система координат $Oxyz$ определяется в пространстве заданием ортонормированного базиса и точки приложения векторов этого базиса (точки O). В этом случае базис называют **декартовым прямоугольным базисом**, а его векторы обозначаются через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1,\ \vec{i} \perp \vec{j},\ \vec{i} \perp \vec{k},\ \vec{j} \perp \vec{k}.$$



Способ разложения произвольного вектора по векторам заданного базиса рассмотрим на конкретном примере.

Пример.

Разложить вектор $\vec{d} = (-1; -6; -2)$ по векторам $\vec{a} = (3; 2; -1)$, $\vec{b} = (1; 4; 3)$ и $\vec{c} = (2; -2; 1)$.

Решение.

Проверим, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис. Составим определитель из координат этих векторов и вычислим его:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 50 \neq 0,$$

следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно независимы, а значит, образуют базис в пространстве. Запишем разложение вектора $\vec{d}$ по базису:

$$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

или

$$-1\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k} = x(3\vec{i} + 2\vec{j} - 1\vec{k}) + y(1\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}) + z(2\vec{i} - 2\vec{j} + 1\vec{k}).$$

Приравнивая коэффициенты при ортах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ слева и справа, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -1 = 3x + y + 2z, \\ -6 = 2x + 4y - 2z, \\ -2 = -x + 3y + z. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $x = -2/5$, $y = -1$, $z = 3/5$. Тогда разложение вектора $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет вид:

$$\vec{d} = -\frac{2}{5}\vec{a} - \vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}.$$

4 Скалярное произведение векторов

Определение

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

Тогда $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$, $\sqrt{\vec{a}^2}=|\vec{a}|$.
5. $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Теорема (скалярное произведение в координатной форме)

Пусть заданы два вектора $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ и $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$. Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ .$$

5 Приложения скалярного произведения

1. Угол между векторами.

Угол φ между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

2. Проекция вектора на заданное направление.

Учитывая определение проекции вектора на ось, формулу скалярного произведения векторов можно записать в виде:

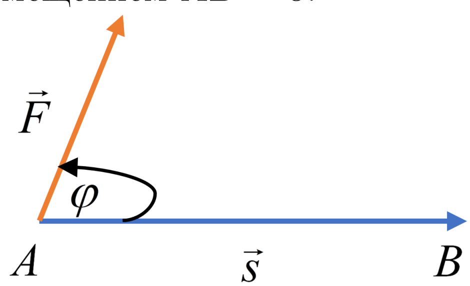
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Следовательно, например, проекция вектора $\vec{a}$ на направление, задаваемое вектором $\vec{b}$, может быть вычислена по формуле:

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

3. Работа постоянной силы (механический смысл скалярного произведения).

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы $\vec{F}$, образующей угол φ с перемещением $\overrightarrow{AB} = \vec{s}$.



Из физики известно, что работа силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{s}$ равна

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos\varphi,$$

т.е.

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

