# Аналитическая геометрия
# Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
# Лекция 1.3

**Аннотация**

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ): координатная и матричная формы записи, основные понятия. Критерий Кронекера – Капелли совместности СЛАУ. Решение СЛАУ матричным методом, по формулам Крамера и методом Гаусса.

## 1 Системы линейных алгебраических уравнений

*Определение*

**Системой из $m$ линейных алгебраических уравнений с $n$ неизвестными** (сокращенно СЛАУ) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

где числа $a_{ij}$ $(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n)$ - это **коэффициенты** системы, числа $b_1, \ldots, b_m$ - **свободные члены**, $x_1, \ldots, x_n$ - **неизвестные**, которые надо определить.

Запись СЛАУ в виде (1) называется **координатной**. Эту систему можно записать в **матричной** форме

$$A \cdot X = B, \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – матрица системы,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – столбец неизвестных,}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ – столбец свободных членов.}$$

*Определение*

**Расширенной** матрицей системы (1) называется матрица $\widetilde{A}$ вида

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underbrace{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}}_{A} & & & & \underbrace{b_m}_{B} \end{array}\right).$$

В этой матрице вертикальная черта используется исключительно для визуального выделения последнего столбца, какого-либо функционального значения она не имеет.

*Определение*

Система (1) называется **однородной**, если $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, в противном случае она называется **неоднородной**.

*Определение*

**Решением** СЛАУ называется такой набор значений неизвестных $x_1^{(\circ)}, x_2^{(\circ)}, ..., x_n^{(\circ)}$, который при подстановке в каждое уравнение системы (1) обращает его в верное тождество.

*Определение*

Система (1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной**, если решений не имеет.

*Определение*

Совместная система называется **определенной,** если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое конкретное решение называется **частным** решением системы.

*Определение*

Совокупность всех частных решений называется **общим** решением системы.

*Определение*

Пусть ранг матрицы совместной системы равен $r$. Неизвестные $x_1, x_2, ..., x_r$ называются **базисными**, если коэффициенты при них образуют базисный минор матрицы системы. Остальные $n - r$ неизвестные называются **свободными**.

# 2 Критерий совместности СЛАУ

*Теорема Кронекера-Капелли (о совместности СЛАУ)*

Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы $A$ был равен рангу ее расширенной матрицы $\widetilde{A}$.

 

Для совместных СЛАУ верны следующие *утверждения*:

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

# 3 Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим систему из $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными в матричной форме:

$$AX = B. \tag{3}$$

Здесь матрица $A$ квадратная.

*Теорема (о существовании решения)*

Система (3) имеет решение и притом единственное, если определитель матрицы системы $\det A \neq 0$.

*Определение*

Если $\det A \neq 0$, то система (3) называется **невырожденной**.

Пусть $\det A \neq 0$. Умножив обе части уравнения (3) слева на матрицу $A^{-1}$, получим:

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{4}$$

Отыскание решения системы (3) по формуле (4) называется **матричным методом решения системы**.

# 4 Метод Крамера

Рассмотрим равенство (4):

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot A^{*} \cdot B =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n \\ ... \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

По теореме разложения определителя $k$-ый элемент получившегося вектора есть разложение определителя, полученного из определителя матрицы $A$ заменой $k$-ого столбца столбцом свободных членов $B$. Тогда получим формулы для вычисления решения системы (3):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{5}$$

где

$$\Delta = \det A, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}, ....$$

Формулы (5) называются **формулами Крамера**, а метод решения невырожденных систем по формулам (5) – **методом Крамера**.

# 5 Метод Гаусса

Метод Гаусса предназначен для решения любых СЛАУ и условно делится на два этапа:

1. Прямой ход.

Исходная система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого вида.

2. Обратный ход.

Последовательно, начиная с последнего уравнения ступенчатой системы, находятся все неизвестные.

*Пример.* Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$
Выписываем матрицы $A$ и $B$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$
и начинаем решение:

*Прямой ход*

1. С помощью элементарных преобразований приводим расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:
$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 5 & -4 \end{array}\right) \overset{(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 3 & 3 & -24 \end{array}\right) \overset{(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right).$$
Сделаны следующие преобразования:
(1) первую строку умножили на (-2) и добавили ко второй,
(2) вторую строку разделили на 3.

2. Находим ранги матрицы системы $A$ и расширенной матрицы системы $\widetilde{A}$ по эквивалентным им ступенчатым матрицам, причем ступенчатая матрица для $A$ получается путем удаления из ступенчатой матрицы для $\widetilde{A}$ последнего столбца.

Получаем, что $r(A) = r(\widetilde{A}) = 2$. Следовательно, по теореме Кронекера-Капелли (см. раздел 2 лекции) система совместна.

Поскольку количество неизвестных $n = 3$ больше ранга матрицы $r(A)$, то система имеет бесконечно много решений (см. утверждение 2 из раздела 2 лекции).

3. Формируем базисный минор ступенчатой матрицы, эквивалентной матрице $A$. Поскольку в нашем случае $r(A) = 2$, то он имеет второй порядок. Возьмем элементы первого и второго столбцов:
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

 

Если бы этот определитель оказался равен нулю, то нам было бы необходимо выбрать другие столбцы.

4. Определяем базисные неизвестные. Поскольку мы включили в определитель первый и второй столбцы, то базисными неизвестными будут $x_1$ и $x_2$. Оставшаяся неизвестная $x_3$ будет свободной.

5. Выписываем систему уравнений, соответствующую полученной в пункте 1 ступенчатой матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 10, \\ \qquad\quad x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$$

6. Положим, что свободная неизвестная $x_3 = c$, где $c$ - произвольная постоянная. Тогда

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 10 - c, \\ \qquad\quad x_2 = -8 - c. \end{cases}$$

Введение произвольной постоянной $c$ обусловлено тем, что из двух уравнений мы можем однозначно найти лишь две неизвестные, в качестве которых берутся базисные неизвестные $x_1$ и $x_2$. Свободная неизвестная $x_3$ может принимать любые значения, однозначно ее найти нельзя.

*Обратный ход*

7. Последовательно, начиная с последнего уравнения системы найдем выражения базисных неизвестных через свободные:

$$x_2 = -8 - c,$$
$$x_1 = 10 - c + 2x_2 = -6 - 3c.$$

8. Выписываем решение:

 

$$\begin{cases} x_1 = -6 - 3c, \\ x_2 = -8 - c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Данное решение является общим решением системы, т.е. содержит в себе все частные решения, которые получаются путем придания произвольной постоянной $c$ конкретных значений. Например, положив $c = 0$, получим конкретное частное решение

$$\begin{cases} x_1 = -6, \\ x_2 = -8, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$