Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.2

Аннотация

Вырожденные и невырожденные матрицы. Присоединенная матрица. Обратная матрица и ее свойства. Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы и с помощью элементарных преобразований. Решение матричных уравнений $AX{=}C$, $XB{=}C$, $AXB{=}C$.

1 Обратная матрица

Определение

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля, и **вырожденной**, если он равен нулю.

Определение

Матрицей, **присоединенной или союзной** к квадратной матрице A, называется матрица, состоящая из алгебраических дополнений A_{ij} элементов a_{ij} матрицы A, причем алгебраические дополнения элементов i-ой строки записываются в i-ый столбец.

Обозначение: A^*.

Пример.

Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Определение

Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** квадратной матрице A, если выполнено условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы)

Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица A является невырожденной.

Обратная матрица вычисляется по формуле: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$.

Свойства обратной матрицы:

1) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;
2) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
4) $\left(A^{-1}\right)^{T} = \left(A^{T}\right)^{-1}$.

2 Вычисление обратной матрицы

1 способ: Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной.

Чтобы найти обратную матрицу, нужно:

1. Вычислить определитель данной матрицы. Если он отличен от нуля, то обратная матрица существует.

2. Вычислить алгебраические дополнения всех элементов исходной матрицы и составить присоединенную.

3. Вычислить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^*$.

4. Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Пример. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Находим определитель матрицы A: $\det A = 2$.

2. Составим присоединенную матрицу A^*, вычислив алгебраические дополнения матрицы A:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Находим A^{-1}: $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 2 \\ -10 & 28 & 4 \\ -4 & 11 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5.5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Проверка:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ -5 & 14 & 2 \\ -2 & 5.5 & 1 \end{pmatrix}$.

2 способ: Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

Чтобы найти обратную матрицу к матрице A, нужно:

1. Составить матрицу $D = (A|E)$, приписав к исходной матрице A справа единичную E того же порядка.

2. Элементарными преобразованиями строк преобразовать матрицу D так, чтобы обратить ее левую половину в единичную матрицу, тогда правая половина превратиться в обратную A^{-1}.

3. Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Пример. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Составим матрицу $D = (A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

2. Произведем элементарные преобразования над строками матрицы D:

a) элементы первой строки матрицы D умножим на (-1) и сложим с элементами второй, а затем и третьей строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

b) элементы второй строки умножим на (-1) и сложим с элементами третьей строки:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right);$$

c) элементы третьей строки умножим на (-2) и сложим с элементами второй строки:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(E|A^{-1}\right).$$

3. Проверка:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Матричные уравнения

Определение

Матричными уравнениями называются уравнения вида

$$AX = C,\ XB = C,\ AXB = C,$$

где A, B, C - известные матрицы, причем A, B - квадратные и невырожденные, а X - неизвестная.

Определение

Некоторую матрицу называют **решением матричного уравнения** относительно неизвестной матрицы X, если при ее подстановке вместо X матричное уравнение обращается в тождество.

Матричные уравнения решаются путем умножения их левой и правой частей на матрицу, обратную одной из известных матриц A или B. Поскольку при умножении матриц множители нельзя менять местами, обе части уравнения умножаются одновременно на обратную матрицу с той стороны, с которой стоит известная матрица A или B.

1. $AX = C$.

Здесь матрица A стоит слева от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на A^{-1} слева:

$A^{-1}AX = A^{-1}C$,

$EX = A^{-1}C$,

$X = A^{-1}C$.

2. $XB = C$.

Здесь матрица B стоит справа от X. Поэтому обе части уравнения умножаем на B^{-1} справа:

$XBB^{-1} = CB^{-1}$,

$XE = CB^{-1}$,

$X = CB^{-1}$.

3. $AXB = C$.
Обе части уравнения умножаем слева на A^{-1} и справа на B^{-1}:
$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}$,
$X = A^{-1}CB^{-1}$.

Пример. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение.
Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

и найдем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.