Аналитическая геометрия
Модуль 1. Матричная алгебра. Векторная алгебра
Лекция 1.4

Аннотация

Геометрические векторы и их виды. Линейные операции над векторами (сложение двух векторов и умножение вектора на число) и их свойства. Ортогональная проекция вектора на ось и ее свойства. Координаты вектора в декартовой прямоугольной системе координат.

1 Векторы

Определение

Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются **скалярными** (длина, температура).

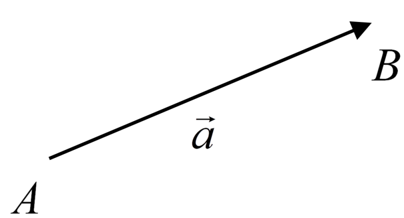
Определение

Величины, которые характеризуются не только своим числовым значением, но и направлением, называются **векторными** (сила, скорость).

Определение

Геометрический вектор – это отрезок с заданным направлением.

Обозначение: $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$



Здесь A - начало вектора, B - конец вектора.

Виды геометрических векторов:

1. Если точка приложения вектора не фиксирована, то вектор называется **свободным**.

2. Если точку приложения вектора можно перемещать только вдоль прямой, то вектор называется **скользящим**.

3. Если точка приложения вектора фиксирована, то вектор называется **связанным**.

Определение

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется **противоположным** вектору $\overrightarrow{AB}$.

Обозначение: $-\overrightarrow{AB}$

Определение

Длиной (**модулем**) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым**.

Обозначение: $\vec{0}$.

Нулевой вектор направления не имеет.

Определение

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным**.

Обозначение: $\vec{e}$.

Определение

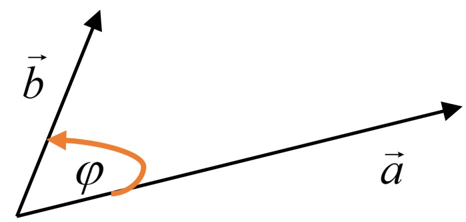
Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$.

Обозначение: $\overrightarrow{a}^0$.

Определение

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют наименьший из углов, образованных этими векторами при условии, что их начальные точки совпадают.

Обозначение: $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ или φ.



$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

Определение

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Обозначение: $\vec{a}||\vec{b}$.

Коллинеарные векторы могут быть **сонаправлены** (иметь одно направление, $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$) или **противоположно направлены** ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$).

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение

Три вектора в пространстве называются **компланарными,** если они лежат либо в одной плоскости, либо в параллельных плоскостях.

Определение

Два вектора называются **равными**, если они коллинеарны, сонаправлены и их длины равны.

Обозначение: $\vec{a} = \vec{b}$.

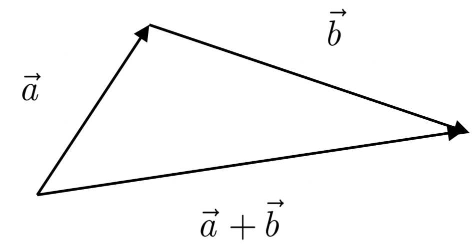
2 Линейные операции над векторами

Определение

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, направленный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что $\vec{b}$ приложен к концу $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Задаваемое определением правило сложения двух векторов носит название **правило треугольника**:



Определение

Произведением вектора $\vec{a}$ **на число** λ называется такой вектор $\vec{c}$, что

1) $|\vec{c}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$;

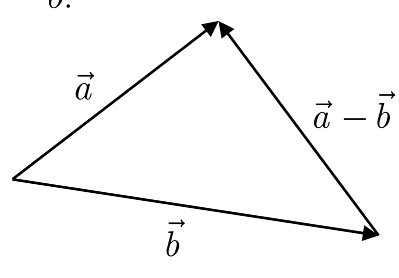
2) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$, и $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Обозначение: $\vec{c} = \lambda\vec{a}$.

Определение

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.



Свойства линейных операций над векторами:

1) коммутативный закон
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},$$
2) ассоциативный закон
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}),$$
3) дистрибутивный закон
$$\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b},$$
4) умножение на ноль
$$0\cdot\vec{a}=\vec{0},$$
5) сложение с нулевым вектором
$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

3 Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l.

Определение

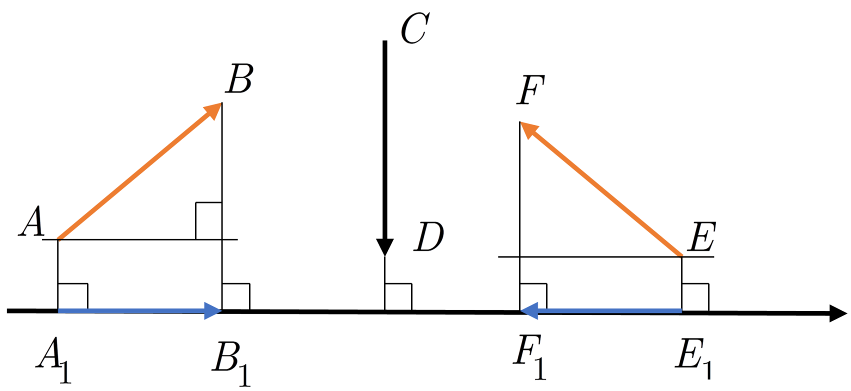
Ортогональной проекцией (или просто проекцией) **точки** M на ось l называется основание M_1 перпендикуляра MM_1, опущенного из точки на ось.

Пусть задан вектор $\overrightarrow{AB}$ и пусть A_1 - проекция точки A, B_1 - проекция точки B на ось l.

Определение

Ортогональной проекцией (или просто проекцией) **вектора** $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены.

Обозначение: $\text{пр}_l\overrightarrow{AB}$



На рисунке $\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{A_1B_1}|$, $\text{пр}_l\overrightarrow{CD} = 0$, $\text{пр}_l\overrightarrow{EF} = -|\overrightarrow{E_1F_1}|$.

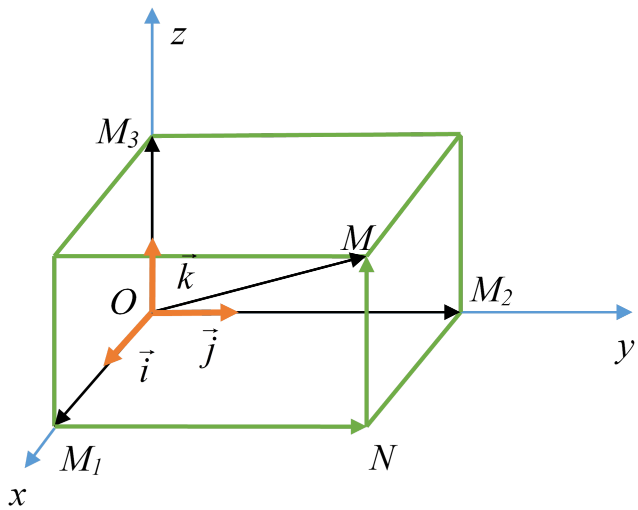
Основные свойства проекций:
1. $\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\ l})$.
2. $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l\vec{a} + \text{пр}_l\vec{b}$.
3. $\text{пр}_l(\alpha \cdot \vec{a}) = \alpha \cdot \text{пр}_l\vec{a}$.

4 Координаты вектора

Рассмотрим в пространстве декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy, Oz единичные векторы (орты), обозначаемые $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Далее выберем в пространстве произвольную точку M и построим вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. Проведем через точку M плоскости, параллельные координатным плоскостям. Эти плоскости пересекают оси Ox, Oy, Oz в точках M_1, M_2 и M_3. Тогда

$$\text{пр}_x\vec{a} = |\overrightarrow{OM_1}|,\ \text{пр}_y\vec{a} = |\overrightarrow{OM_2}|,\ \text{пр}_z\vec{a} = |\overrightarrow{OM_3}|.$$



По определению суммы нескольких векторов находим:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM}.$$

Т.к. $\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_3}$, то $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$.

Далее,

$$\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \vec{i} = \text{пр}_x\vec{a} \cdot \vec{i} = a_x\vec{i},$$
$$\overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \vec{j} = \text{пр}_y\vec{a} \cdot \vec{j} = a_y\vec{j},$$
$$\overrightarrow{OM_3} = |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \vec{k} = \text{пр}_z\vec{a} \cdot \vec{k} = a_z\vec{k}.$$

Таким образом, получаем **разложение вектора по ортам координатных осей**:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

где a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат Ox, Oy и Oz.

Определение

Числа a_x, a_y, a_z называются **координатами вектора** $\vec{a}$.

Обозначение: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Из теоремы о диагонали прямоугольного параллелепипеда следует:

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Отсюда

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ. По определению проекции вектора на ось имеем

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, a_z = |\vec{a}| \cdot \cos\gamma.$$

Откуда

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.$$

Определение

Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{a}$.

Свойство направляющих косинусов:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

